

差分法による杭打ちの一次元波動方程式解析法の開発 (その1:検証解析)

差分法 杭打ち 波動方程式

金沢大学 学生会員 脇坂誉志  
 金沢大学 国際会員 松本樹典  
 (株)ジオトップ 正会員 小嶋英治、桑山晋一

1. はじめに 杭の動的載荷試験に伴う杭中の波動現象の解析法として、周面摩擦を考慮した一次元波動方程式の差分法による解析プログラムを開発した。

2. 解析手法 本研究では前進差分で周面摩擦を陽に考慮した一次元波動方程式(1)を解いた。ここで  $w$  は杭の変位、 $t$  は時刻、 $c$  は伝播速度、 $x$  は距離、 $\tau$  は周面摩擦、 $\rho$  は杭の密度そして  $r$  は杭の半径を表わす。差分法を用いることで、杭材料の非線形性も考慮することができる。周面摩擦および杭先端地盤モデルを図1と図2に示す。両モデルとも変位に依存するバネと速度に依存するダッシュポットを有しており、地盤の降伏はスライダーによってモデル化されている。これらのモデルを用いることで、バネ定数、逸散減衰定数および付加質量を地盤パラメータ(せん断剛性  $G$ 、ポアソン比  $\nu$ 、密度  $\rho_s$ )と杭半径  $r$  から決定することができる。周面摩擦に関しては式(2)より、杭先端地盤モデルに関しては式(3)より決定する<sup>2)3)</sup>。ここで  $V_s$  は地盤のせん断波速度である。

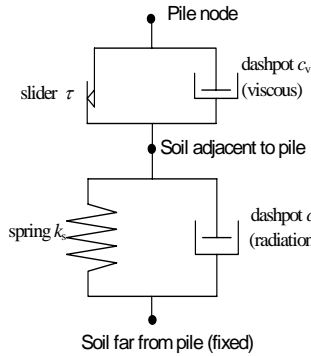


図1 周面摩擦モデル<sup>1)</sup>

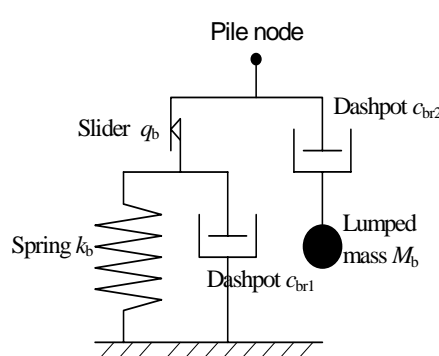


図2 杭先端地盤モデル<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H\tau, \quad H = -\frac{1}{\rho r} \quad (1)$$

$$k_s = \frac{2.75G}{2\pi r}, \quad c_r = \frac{G}{V_s} \quad (2)$$

$$k_b = \frac{4G}{\pi r(1-\nu)}, \quad c_b = \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} \frac{G}{V_s}$$

$$M_b = 16r^3 \frac{0.1-\nu^4}{1-\nu} \rho_s \quad (3)$$

3. 検証解析

3.1 解析条件 本報告では一様断面杭として、長さ10 m、杭径400 mm、ヤング率  $3.0 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>、伝播速度5000 m/s、密度1.2 ton/m<sup>3</sup>、質量1.51 tonの杭を解析対象とした。そして、開発したプログラムの有用性を、理論解および1自由度系の振動解との比較によって検証した。

3.2 検証結果

a. 理論解との比較 周面摩擦を考慮しない一次元波動方程式には理論解が存在するため、この方程式を差分法で解き、計算値と理論値を比較した。ただし杭先端境界条件は自由とした。図3が杭頭への載荷応力である。図4が杭中の応力を時間ごとに計算値と理論値で示したものである。伝播速度は5000 m/sであるため、 $t = 2$  msで応力波は杭先端に達し、杭先端自由であるため杭先端で引張り応力に変わり、 $t = 4$  msで杭を一往復する。図4より、計算値と理論値がほぼ一致しているのがわかる。また図5は杭中央の変位の時間的変化であり、この結果においても理論値と計算値が非常に良く一致した。なお、図には示さないが杭先端固定の場合においても理論値と計算値が非常に良く一致した。

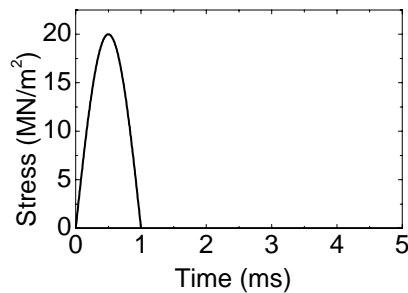


図3 載荷応力

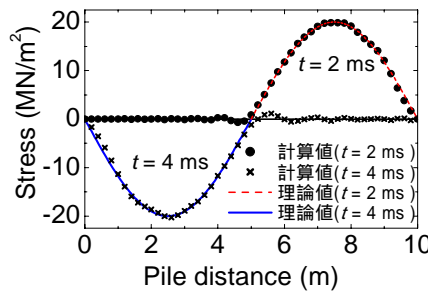


図4 杭中の応力分布の時間変化

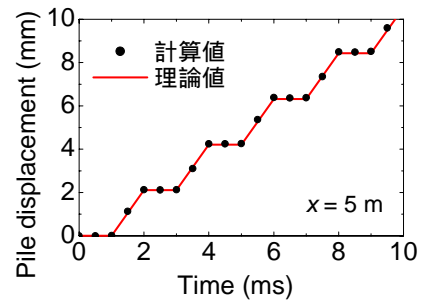


図5 杭変位の時間変化

b. 理論解が存在しない場合の検証(周面摩擦のみを考慮) 周面摩擦を考慮した一次元波動方程式には理論解が存在しない。よって図6に示す1質点系モデルを基に、計算結果を1自由度系の振動解と比較検証した。地盤定数決定の際、便宜上式(2)には基づかず、バネ定数  $k_s = 2.0 \times 10^3$  kN/m<sup>3</sup>、また減衰定数  $c_r = 5.0$  kN · s/m<sup>3</sup>とした。載荷応力は図3と同じである。減衰が無い場合の検証結果を図7に示す。計算値は振動解とほぼ一致した。ここで、計算値に見られる凹凸は杭中を伝播する波動現象によるものである。また、減衰を考慮した時の検証結果を図8に示す。この結果においても、計算値は振動解に良く一致している。

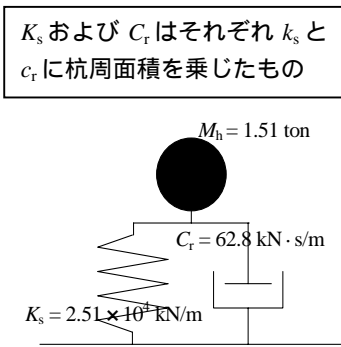


図6 1質点系モデル

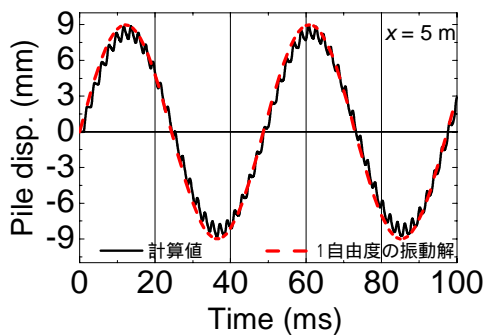


図7 変位の時間変化(減衰無)

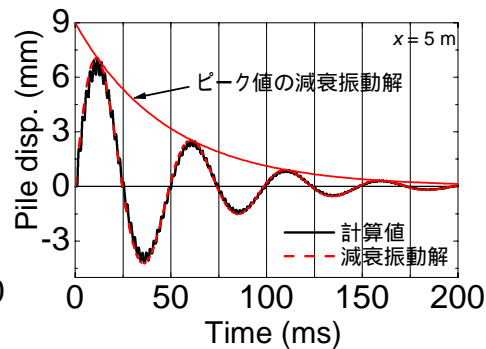


図8 変位の時間変化(減衰有)

**4. 本解析で用いた地盤モデルの特性** 図1および図2に示した各地盤モデルの検証として、この地盤モデルが有するバネおよびダッシュポットを順番に考慮していき、それぞれの結果を比較した。杭の条件は本文3.1で述べた解析条件と同じである。地盤定数を決定する際、地盤モデルの特性をより分かり易く図に示すため、式(2)および(3)には基づかず、 $\tau_s = 5.0 \text{ kN/m}^2$ 、 $k_s = 2.0 \times 10^3 \text{ kN/m}^3$ 、 $c_r = 1.5 \text{ kN} \cdot \text{s/m}^3$ とした。ここで動的な周面摩擦 $\tau_d$ の算定式として、式(4)を用いることが多い<sup>4)</sup>。式(4)において、 $\tau_s$ は静的な周面摩擦力、 $v$ は杭と地盤の速度差、そして $v_0$ はreference velocityであり、 $v_0 = 1 \text{ m/s}$ である。また $\alpha$ および $\beta$ は地盤によって変化する値であり、 $\beta$ は0.2、 $\alpha$ に関しては砂地盤で0.1、粘土地盤では1.0の値をとる<sup>5)6)</sup>。ここでは $\alpha$ を0.1に設定した。図9に示した周面摩擦力の動員過程では、地盤降伏前の周面摩擦力は静的なバネによる応力と動的なダッシュポットによる応力の和で表わされている。また、地盤降伏後においても静的なスライダーによる応力および粘性による応力で周面摩擦力が表わされている。図10は、バネ、逸散減衰および粘性減衰を考慮した場合の杭と地盤の変位の時間変化である。地盤降伏後に杭と地盤の挙動は独立しており、最終的な両者の変位差が杭の沈下量となる。同様に杭先端地盤モデルの検証結果を図11に示す。ここで用いた地盤定数は $q_b = 300 \text{ kN/m}^2$ 、 $k_b = 5.0 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ 、 $c_{br1} = c_{br2} = 24 \text{ kN} \cdot \text{s/m}^3$ 、 $M_b = 0.03 \text{ ton}$ である。図11においても図9と同じように、減衰定数を考慮することで杭先端応力の増加が見られる。 $c_{br2}$ を考慮した場合は付加質量による杭先端応力の増加が見られる。以上のように開発したプログラムでは周面摩擦モデルおよび杭先端地盤モデルを正確に表現することができる。

$$\tau_d = \tau_s \left\{ 1 + \alpha \left( \frac{\Delta v}{v_0} \right)^\beta \right\} \quad (4)$$

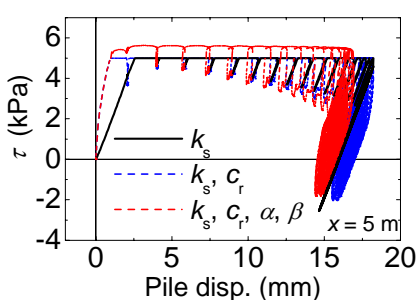


図9 周面摩擦力の動員過程

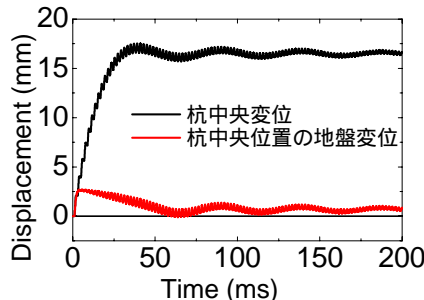


図10 杭および地盤の変位の時間変化

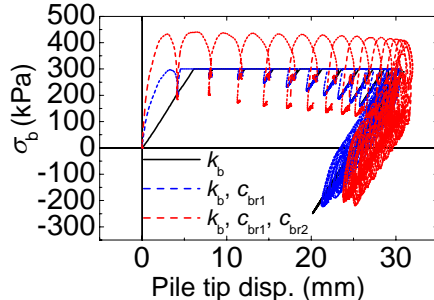


図11 杭先端応力の動員過程

**5. 結論** 以上の結果より、新たに開発したプログラム(KWAVEFD)の有用性が確かめられた。

#### 参考文献

- 1) Randolph MF & Deeks AJ(1992): Dynamic and static soil models for axial pile response. *Proceeding of the 4th International Conference on Application of Stress Wave Theory to Piles*: 3-14.
- 2) Novak M, Nogami T, Aboul-Ella F(1978): Dynamic soil reactions for plane strain case. *Jour. of Mechanical Eng. Div., ASCE*, **104**(EM4): 953-959.
- 3) Deeks AJ & Randolph MF(1995): A simple model for inelastic footing response to transient roadog. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **19**: 307-329
- 4) Gibson G & Coyle H.M(1968): Soil damping constant related to common soil properties in sands and clays. Report No. 125-1, Texas Transport Institute, Texas A & M University.
- 5) Heerema E.P(1979): Relationships between wall friction, displacemen, velocity and horizontal stress in clay and in sand for pile driveability analysis. *Ground Engineering*, **12**(1).
- 6) Litkouhi S & Poskitt T.J(1980): Damping constant for pile driveability calculations. *Geotechnique*, **30**(1): 77-86.