

## 両対数グラフの特性と留意点

㈱ジオトップ 正会員 平山 英喜

### 1. まえがき

両対数グラフでは、広範囲の2変数の値がコンパクトにまとめられることや、指数関数  $y = Cx^k$  ( $C, k = \text{定数}$ ) が直線になるなどの特徴がある。地盤工学の分野でも載荷試験や圧密試験などの結果をグラフにする場合に、両対数グラフが用いられ、結果の解釈の際にその折点、あるいはより広義には最大曲率点が利用されることがある。しかし、グラフの曲率やその変化率は座標軸の目盛りの種類(等分目盛り、対数目盛り)やそのスケールで変化し、図形のマジック<sup>1)</sup>と呼ばれる現象が生じる場合がある。

本稿では、文献<sup>2)</sup>での概説を補足して  $(x, y)$  座標におけるグラフとの比較も含めて、 $(\log x, \log y)$  座標におけるグラフの最大曲率点の位置について数学的に考察する。また、その結果に基づいて、パソコンなどで、両対数グラフを作図する場合の留意点を述べる。

### 2. 関数とグラフの関係

独立変数  $x$  に対して従属変数  $y$  を対応させる、ある関数  $f$  による  $y = f(x)$  をグラフにする場合、 $x, y$  が無次元であれば各々の単位長さは同一にとるのが普通である。しかし、対象とする  $x$  の変域(domain) と  $y$  の値域(range) によっては、異なる単位長さをグラフ化する場合もある。2変数が、物理的に異なる次元を持つもの(例えば、長さの単位の沈下量と力の単位の荷重)の場合は、各座標軸の単位長さあるいはスケールは、任意に設定できる、というよりせざるをえない。

図-1に示すように単位長さを等しくとった  $y = f(x)$  のグラフと、 $x$  軸を  $m$  倍引き伸ばして  $X$  軸としたグラフ  $y = f(X)$  を考えてみる。両者とも関数  $f$  をグラフ化したものである。しかしながら、 $y = f(X)$  のグラフは、元の  $(x, y)$  座標上では  $y = f\{g(x)\}$ ,  $g(x) = x/m$  と合成関数で表される異なる関数をグラフ化したものになる。

図-1において、 $x$  軸の引き伸ばしにより、最大曲率点の  $y$  の値が小さくなっているのは明かである。そこで、元の  $(x, y)$  座標上で、その図形的関係を数学的に検討してみる。 $y = f\{g(x)\}$ ,  $g(x) = x/m = x_m$  の第1階・2階の導関数は、次のようになる。

$$\begin{aligned} dy/dx &= f'(x_m) g'(x) \\ &= f'(x_m)/m \quad \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2y/dx^2 &= f''(x_m) g''(x) \\ &= f''(x_m)/m^2 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

したがって、曲率  $K$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K &= |d^2y/dx^2| / [1+(dy/dx)^2]^{3/2} \\ &= |f''(x_m)/m^2| / [1+\{f'(x_m)/m\}^2]^{3/2} \quad \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

ここで、曲率は、その逆数が曲率半径であるように、平面曲線のある点での曲がりの度合を表す、曲線の図形的性質に関するものであり、導関数のように、 $x, y$  の次元に対応しうるものでない。これが、前述の図形のマジックの種となる。

$dK/dx = 0$  から次式を得る。

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(x_m)| [1+\{f'(x_m)/m\}^2] \\ -3f'(x_m)f''(x_m) |f''(x_m)| / m^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

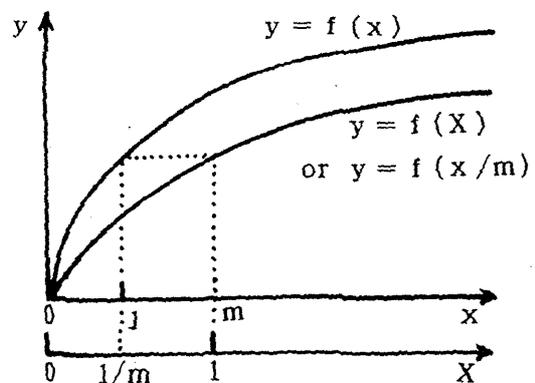


図-1  $(x, y)$  座標における  $y = f(x)$  と  $y = f(x/m)$  のグラフ

"Characteristics of log-log graphs and remarks on them"

Hideki HIRAYAMA (GEOTOP Corporation)

(4)式 から、曲率最大となる点、すなわち曲率半径最小となる点、の  $y$  の値は、 $m$  に依存することになる。

具体例として、次の Kondner 型の双曲線

$$f(x) = x / (a + b x) \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$g(x) = x / m = x_m \quad \dots\dots\dots(6)$$

を仮定して、 $y = f\{g(x)\}$  の特性を検討してみる。第1階、2階の導関数は次式で与えられる。

$$y' = (a / t^2)(1/m) \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$y'' = (-2 a b / t^3)(1/m^2) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{ここに、} t = a + b(x/m) = a + b x_m$$

したがって、曲率  $K$  およびその導関数は次式で与えられる。

$$K = (2 a b t^3 / m^2) / (t^4 + a^2 / m^2)^{3/2} \dots\dots\dots(9)$$

$$dK/dx = (6 a b^2 t^2 / m^3)(a^2 / m^2 - t^4) / (t^4 + a^2 / m^2)^{5/2} \dots\dots\dots(10)$$

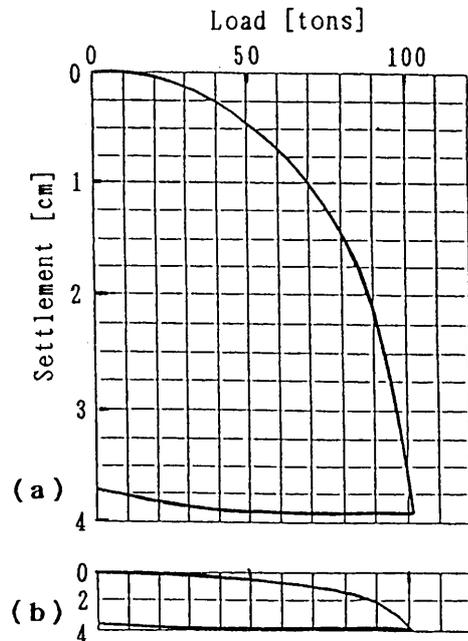
$dK/dx = 0$  から、 $ma \leq 1$  の時、 $t = \sqrt{m/a}$  を得る。すなわち、点  $((\sqrt{ma} - ma)/b, (1 - \sqrt{ma})/b)$  で、曲率が最大となる。初期接線勾配は(7)式から  $1/ma$  となるので、初期接線勾配が  $45^\circ$  以上になるようにグラフ化すると最大曲率点が存在するが、その  $(x, y)$  座標は座標軸のスケールに依存し、初期接線勾配を急にすほど、最大曲率点での  $y$  の値の極限值  $(= 1/b)$  に対する比率は大きくなる。

実際例として、杭の荷重-沈下量 ( $P-S$ ) 曲線の  $S$  のスケールが8倍違うグラフを比較したものを、**図-2** に示す<sup>3)</sup>。この  $P-S$  曲線を、(5)式と同型の双曲線  $P = S / (a + b S)$  で表すと、 $P > 50$  [tf] では、 $a = 0.0056$  [cm/tf]、 $b = 0.0086$  [1/tf] とした曲線とほぼ一致する。これらの値から、**図-2 (a)** では、 $1/ma = 9/2$ 、**図-2 (b)** では、 $1/ma = 36$  となり、最大曲率点の荷重は、各々  $61$  [tf]、 $97$  [tf] と算定される。このように、 $P-S$  曲線の急変する点による支持力判定法は、座標軸のスケールによって無視しえない影響がでる<sup>4)</sup>。これは、(3)式に関連して述べたように、曲線の図形的な性質には、両軸の持つ物理的な次元は考慮されないことに起因する。したがって、等分目盛りの方眼紙は、

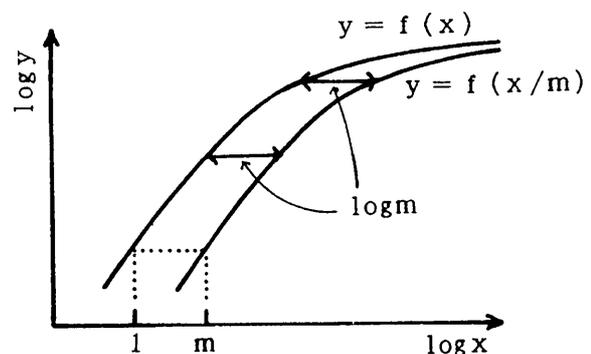
読み取り易さの点から最も自然なものであるが、曲線形状は関数固有のものでないことに、留意する必要がある。

### 3. 両対数グラフの特性

**図-1** に示した2曲線、すなわち  $y = f(x)$  と  $y = f\{g(x)\} = f(x/m)$  を、両対数座標にグラフ化する場合を検討してみる。両対数方眼紙は、市販のもののように、縦横の対数目盛りの単位長さ (1 サイクル) が等しいものとする。**図-3** に示すように、 $y = f(x/m)$  のグラフは、 $y = f(x)$  のグラフをそのまま  $\log m$  だけ平行移動したものになる。これは、比が差になる対数の特性、すなわち  $\log(x/m) = \log x - \log m$ 、による。したがって、例えば  $x$  が沈下



**図-2**  $S$  のスケールの異なる  $P-S$  曲線<sup>3)</sup>



**図-3**  $(\log x, \log y)$  座標における  $y = f(x)$  と  $y = f(x/m)$  のグラフ

量とすると、mm単位とcm単位の間のような常用対数の底の10の整数乗の変換だけでなく、inch単位で表してもグラフはそのまま平行移動するだけである。

また、両対数グラフの場合の接線勾配は、次式のようにxに関するyの elasticity (〔経済学における〕弾力性)、

$$\frac{d(\log y)}{d(\log x)} = \frac{dy/y}{dx/x} \dots\dots\dots(11)$$

になるので、無次元であり、単位の採り方に無関係になる。したがって、平行移動するだけなので当然のことであるが、x、yが次元を有する場合でも、グラフの図形的性質は変化しない。

具体例として、再度(5)(6)式的双曲線を仮定して、 $y = f\{g(x)\}$ の両対数座標での特性を検討してみる。第1階、2階の導関数に相当するものは次式で与えられる。

$$y_{1 \log'} = (dy/y)/(dx/x) = a/t \dots(12)$$

$$y_{1 \log''} = d(y_{1 \log'})/(dx/x) = -a b x_m / t^2 \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $t = a + b x_m$

したがって、曲率Kおよびその導関数に相当するものは次式で与えられる。

$$K = |y_{1 \log''}| / \{1 + (y_{1 \log'})^2\}^{3/2} = a b x_m t / (t^2 + a^2)^{3/2} \dots\dots(14)$$

$$dK/d(\log x) = -a(t^2 - a^2)(t^2 - 3at + a^2) / (t^2 + a^2)^{5/2} \dots\dots\dots(15)$$

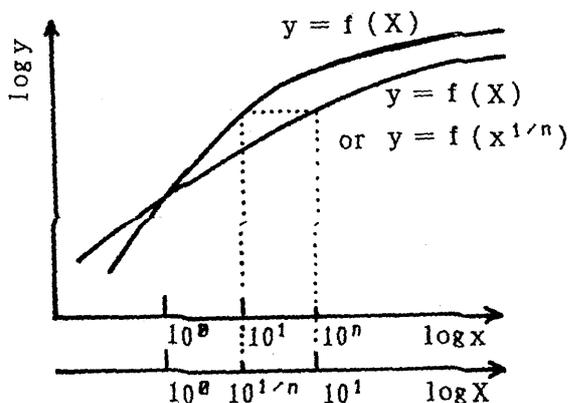


図-4 (log x, log y)座標における  $y = f(x)$ と $y = f(x^{1/n})$ のグラフ

$dK/d(\log x) = 0$ から、 $t = \{(3 + \sqrt{5})/2\} a$ を得る。したがって、点  $\{(1 + \sqrt{5})/2\} (m a / b)$ ,  $\{(\sqrt{5} - 1)/2\} (1/b)$  で、曲率が最大となる。すなわち、最大曲率点でのyの値は極限值(=  $1/b$ )の $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618$ 倍で、一定となる。

なお、図-2のデータを両対数でグラフにした場合、最大曲率点の荷重は $72\{tf\}$ となる。

#### 4. 両対数グラフにおける留意点

前章で、縦横の対数目盛りの単位長さが等しい両対数方眼紙においては、両軸が無次元量でなくてもグラフの図形的性質は変化しないことを述べた。しかし、最近では、パソコンなどでグラフ作成ソフトを利用することも多くなってきたが、このような場合、両軸の対数目盛りの単位長さが異なる対数グラフが作図されるケースも見られる。そのようなグラフでは、上述の対数グラフの特性はなくなり、2章で述べた関数とグラフの関係に関する問題点が生じることを、以下に示す。

図-4に示した対数目盛りの単位長さを等しくとった  $y = f(x)$ のグラフと、log x軸をn倍引き伸ばして log X軸としたグラフの図形的関係を、元の(log x, log y)座標上で検討してみる。

(log x, log y)座標上で、 $y = f\{g(x)\}$ ,  $g(x) = x^{1/n} = x_n$  (すなわち、 $\log x / \log X_n = n$ )の  $y_{1 \log'}$ 、 $y_{1 \log''}$  は、(12)(13)式と同様にして

$$y_{1 \log'} = x_n f'(x_n) / \{n f(x_n)\} \dots(16)$$

$$y_{1 \log''} = (1/n^2) [x_n^2 f''(x_n) / f(x_n) + x_n f'(x_n) / f(x_n) - \{x_n f'(x_n) / f(x_n)\}^2] \dots(17)$$

となる。(16)(17)式は(1)(2)式と同様の性質を持ち、曲率最大となる点のyの値は、nに依存することになる。

具体例として、ここでも(5)式的双曲線をベースに、

$$f(x) = x / (a + b x) \dots\dots\dots(5) \text{ bis}$$

$$g(x) = x^{1/n} = x_n \dots\dots\dots(18)$$

を仮定して、 $y = f\{g(x)\}$ の両対数グラフの特性を検討してみる。

前章と同様にして、次式が得られる(ここに、

$$t = a + b x_n)。$$

$$y \log' = (a/t)(1/n) \dots\dots\dots(19)$$

$$y \log'' = (-a b x_n / t^2)(1/n^2) \dots\dots(20)$$

$$K = (a b x_n t / n^2) / (t^2 + a^2 / n^2)^{3/2} \dots(21)$$

$$\begin{aligned} dK/d(\log x) &= -(1/n^3) a b x_n \\ &\cdot (t^3 - 2 a t^2 - 2 a^2 t / n^2 + a^3 / n^2) \\ &/ (t^2 + a^2 / n^2)^{5/2} \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$dK/d(\log x) = 0$  から、次の3次方程式を得る。

$$t^3 - 2 a t^2 - 2 a^2 t / n^2 + a^3 / n^2 = 0 \dots(23)$$

この式は、 $n \neq 1$ の時は因数分解できないが、判別式によると3実根を持つので、trigonometric solutionが適用できる<sup>5)</sup>。  $t \geq a$  から、次の根を得る。

$$\begin{aligned} t &= (2/3) (1 + \sqrt{4 + 6/n^2} \cdot \cos \alpha) a \\ \text{with } \cos 3\alpha &= (16 + 9/n^2) / \{2(4 + 6/n^2)^{3/2}\} \\ &\dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

例えば、 $n = 2, 1, 1/2$  に対して、最大曲率点を与える点(x, y)が、(24)式から次のように得られる(図-5参照)。

$$\begin{aligned} n = 2 & \quad (1.385(a/b)^2, \quad 0.541/b) \\ n = 1 & \quad (1.618(a/b), \quad 0.618/b) \\ n = 1/2 & \quad (1.679(a/b)^{1/2}, \quad 0.738/b) \end{aligned}$$

3章で述べたように、縦横の対数目盛りの単位長さが等しい両対数方眼紙において、(5)(6)式の最大曲率点でのyの値は極限値の0.618倍で一定であったものが、単位長さの比を変化させると、上記のように変わることになる。

圧密試験結果の  $e - p$  関係を、 $e - \log p$  で

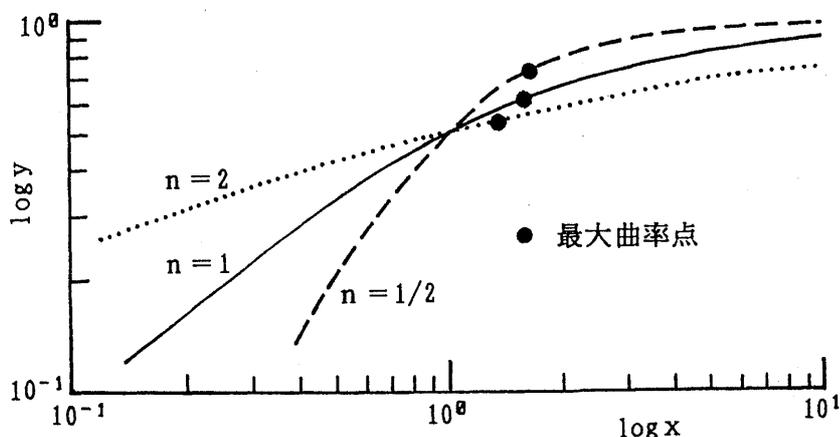


図-5  $y = x^{1/n} / (a + b x^{1/n})$  の両対数グラフ ( $a = b = 1$  の場合)

グラフ化するよりも  $\log(1+e) - \log p$  などの両対数でグラフ化の方が良いという提案<sup>6)</sup>もある。この場合、 $p$  の変化範囲に比べて、 $e$  の変化範囲は一般にずっと小さいので、単位長さがかなり異なる両対数グラフが作図されることが多い。直線部の傾きを直接用いるのには問題ないが、最大曲率点の位置は、関数の性質にもよるが、スケール比にかなり依存する可能性があるので、スケール比を変えた複数のグラフで変動をチェックするなど、留意が必要である。

### 5. あとがき

縦横の対数目盛りの単位長さが等しい両対数方眼紙では、最大曲率点などの図形の性質は、単位の変換の影響を受けない。しかし、両対数グラフでも、単位長さの比を変化させると、いわゆる図形のマジックが生じる。データが離散関数である場合は、折線近似の折点で処理するのが一般的であるが、事情は同じである。最大曲率点の物理的意味は別途検討すべきものであるが、グラフ作図上留意する必要がある。

### 参考文献

- 1) 斎藤迪孝: 第1章 土質工学における誤りやすい諸問題, 土質調査試験結果の解釈と適用例 - 第1回改訂版 -, 土質工学会, pp. 1-31, 1979.
- 2) 平山英喜: 杭の載荷試験法の基準類の背景, 土と基礎, Vol. 43, No. 5, 1995.
- 3) van der Veen, C.: The bearing capacity of a pile, Proc. 3rd ICSMFE, Vol. 2, pp. 84-90, 1953.
- 4) 土質工学会: 杭の鉛直載荷試験方法・同解説, 1993.
- 5) 例えば, Korn, G.A. and Korn, T.M.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill Book, N.Y., 1961.
- 6) Butterfield, R.: A natural compression law for soils (an advance on  $e - \log p'$ ), Geotechnique, Vol. 29, No. 4, pp. 469-480, 1979.